Analisi II (Lezione 1) 26/09/12

www.dm.unipi.it/~cornivat
www.dma.unipi.it/galatolo

Galatolo:
- succ. di funzioni
- serie
- eq. diff.
- integrali in più variabili
- Gauss
  ↓
  mercoledì

Cornivati:
- calcolo in più variabili
- complementi di probabilità e statistica (solo per i civili)
  ↓
  giovedì, venerdì

DMA
10:30 Cornivati, 11:30 Galatolo

Ricevimento giovedì mattina? → Percorso
BUCG → EAM

→ eametc.wordpress.com (Blog ufficiale)

Libro: Bramanti - Pagani - Salsa
"Analisi matematica II" Zanichelli + ESERCIZIARIO

Per probabilità e statistica → dispense

Vieri Benci → compiti di analisi II (e anche sul Blog di Galatolo).

Flandoli → statistica

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

[26/03/12]

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Analisi II (Lezione 1) MM850293/300 GALATOLO [26/03/14]

Spazio metrico. = spazio + nozione di distanza che voglio considerare su quello insieme
(X, d) : X è un insieme che ha come elementi punti, d è la nozione di distanza (è una funzione che va $d: X \times X \to \mathbb{R}$) d prende in entrata due punti dello spazio e li trasforma in un numero reale: $d(x,y)$, il n° reale è la distanza fra i due soddisfare 4 proprietà: (punti) d non può prendere punti distanti, piccoli se sono vicini

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ (FUNZIONE POSITIVA)
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (se la distanza è 0, è un unico punto)
3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (simmetrica)
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

proprietà che una funzione da $X \times X \to \mathbb{R}$ deve possedere per essere definita come distanza

Quindi lo spazio metrico è una coppia X, d, dove X è un insieme e d è una funzione $X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le 4 proprietà.

Esempi:

- $(\mathbb{R}, |x-y|)$ → $d(x,y) = |x-y|$ (la distanza fra due punti è pari al valore assoluto della stessa differenza) → è la distanza che si usa sui reali.



Prende 2 reali in entrata e restituisce un reale ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

x e y sono punti della spazio e una coordinata dello stesso punto.

Soddisfa le 4 proprietà:
è una funzione positiva ($|\cdot| \geq 0$), il valore assoluto fa 0 solo se lo spazio è il valore assoluto è simmetrica (il valore assoluto è una funzione simmetrica), vale la disuguaglianza triangolare
$|a+b| \leq |a| + |b|$

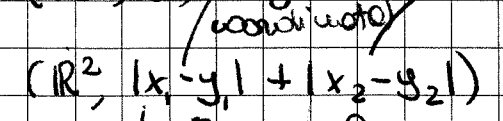
Infatti:

$$|x-y| = |x-y+z-z| \leq |x-z| + |z-y|$$

Aggiungo un altro numero z — Grazie Triangolare — disuguaglianza Triangolare

- $(\mathbb{R}^n, d)$ è facile verificare che soddisfa le 4 proprietà se sono in $\mathbb{R}^n$: $(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|)$

$(\mathbb{R}^2, |x_1-y_1| + |x_2-y_2|)$ è una funzione che prende in entrata 2 punti (4 coordinate) e restituisce un numero reale).



• $(\mathbb{R}^2, \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})$ → in $\mathbb{R}^n$ si prende per tutte le coordinate (L_2) → altra norma di distanza su $\mathbb{R}^2$ [26/03/21]

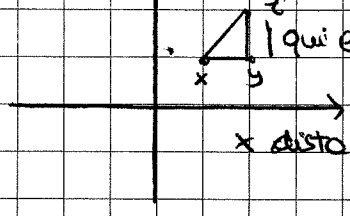
distanza euclidea

Altra norma di distanza:

• $(\mathbb{R}^2, \sup_{1\le i\le 2} |x_i - y_i|)$ → in $\mathbb{R}^n$ si prende il sup fra le coordinate → distanza del sup (L_∞)

prendo 2 punti e le rispetti. → si prende il valore assoluto (distanza fra le coordinate che differiscono di più) → norma = valore assoluto maggiore delle differenze di coordinate

dei valori assoluti.



qui la differenza è più piccola tra le coordinate

Dato un punto voglio contare l'insieme dei numeri che distano da lui di un certo numero; nella distanza euclidea quello che ottengo è una "palla": → luogo dei punti che distano da x meno di r

$B(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$ → aperta (si esclude il bordo)

$B_r(x)$ → centro → gli y ∈ allo spazio (cerchio aperto = da meno di r) (cerchio chiuso = da meno di r) bordo)

$\bar{B}(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) \le r\}$ → chiuso → la "palla" compreso il bordo

definizione generale

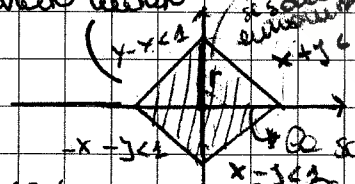
Esempio:

$y < 1+x$ $\quad -y < 1+x$ $\quad y > -x-1$

B(0,1) è l'insieme dei punti che: $\{|x_1| + |x_2| < 1\}$ → soddisfano → il centro è 0 → altrimenti si fa una traslazione

→ lo studio si fa per casi: si considera quando le coordinate sono positive e quando sono negative

quadrato ruotato di 45°



la somma dei vettori deve essere < 1: i vettori possono stare sopra?

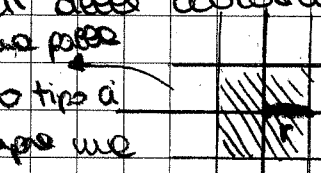
Per la distanza euclidea non è una "palla".

$x+y<1$ è una porzione di piano

Per la distanza del sup:

la "palla" sono l'insieme dei punti, dove il sup dei valori assoluti delle coordinate è minore di 1.

→ considero i punti che stanno tra la 1ª e la 2ª coordinata < 1 (non deve stare)



dentro una palla di questo tipo ci sta sempre una palla euclidea e viceversa

→ sia la coordinata x_1 che la coordinata x_2 sono minori in valore assoluto, di 1 (se centro è 0): altrimenti se c'è uno > 1 il sup considera quella e si va fuori dall'insieme.

Consideriamo: $(\mathbb{R}^2, d)$ spazio metrico successione converge a un punto, unico, dato una qualsiasi palla aperta di centro $\bar{x}$ e raggio ε definitivamente se contenuta in essa da un certo indice in poi. (26/09/12)

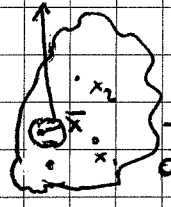
$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$ distanza di una metrica comunque scelta nell'ambito spazio metrico discreto (i punti sono tutti staccati gli uni dagli altri)

↓ qui per convergere a quel punto, devo essere quel punto: posso prendere palle di raggio < 1 (distano tutti di 1) se $r > 1$ è lo spazio, se $r < 1$ è solo lui diverso da convergere, il centro (che è 0) → consistenza ok?

Def generale della convergenza di successioni:

Dato uno spazio metrico (M, d) e una successione di punti $x_n \in M$ con $x_n : \mathbb{N} \to M$, $x_n \to \bar{x}$, appena $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.c. $\forall n \geq N$, $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$

distanza di x_n da $\bar{x}$ è minore di ε.



Qui vedo a sono tutti quei che "palla"

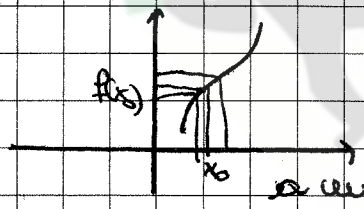
→ la successione finisce dentro qui palla da poi posso avere $\bar{x}$ da un certo N in poi.

Dunque, dato un qualsiasi ε che è il raggio della sfera esiste un N che sta dentro sfera ($\forall n > N$ la distanza di x_n da $\bar{x}$ è $< \varepsilon$)

↓

successione.

Si può definire la continuità anche tra spazi metrici.
In $\mathbb{R}$ era continua se:



se considero la variazione della x intorno a un punto x_0 posso avere variazioni della y piccole quanto voglio (a meno di un intorno di $f(x_0)$).

Nel caso di spazi metrici:

$f: M_1 \to M_2$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon \; \exists \delta$ t.c. $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

↓ è una funzione fra due spazi metrici

y deve essere abbastanza "vicina" a x_0.

Si considerano distanze tra spazi di funzioni; esempio:

MASTER COPY
Tel. 388/9837745